



Facultad de Ciencias Naturales y Exactas  
Universidad del Valle



## REVISIÓN DETALLADA DE LA MÁQUINA DE SZILARD CUÁNTICA

**Diego Luis González**  
Universidad del Valle

Recibido: octubre 17, 2012    Aceptado: diciembre 7, 2012

Pág. 59-72

### Resumen

Se presenta un estudio detallado de la máquina de Szilard cuántica con un número  $N$  de partículas. Se calcula el trabajo total realizado de partículas  $W_{TOT}$ , la función de partición del sistema asociada a cada uno de los procesos involucrados y la posición de equilibrio de la pared. En particular se estudian de forma explícita los casos  $N = 1$  y  $N = 2$  tanto para partículas bosónicas como fermiónicas. En todos los casos los resultados encontrados son comparados con su contraparte clásica. Se encuentra que, en general,  $W_{TOT}$  depende de la naturaleza bosónica o fermiónica de las partículas.

**Palabras Claves:** Información cuántica, termodinámica y mecánica estadística cuántica.

### Abstract

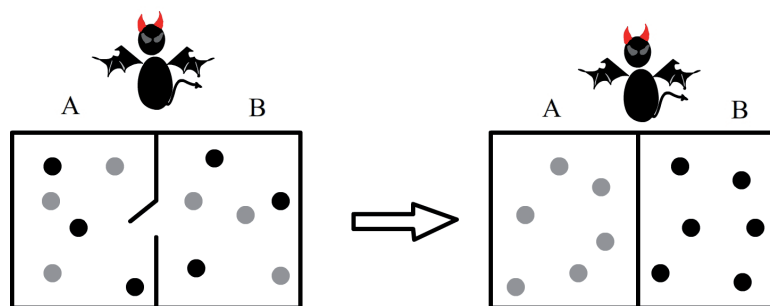
A detailed study of the quantum Szilard engine with a number  $N$  of particles is presented. The total work done by the engine,  $W_{TOT}$ , the partition function of the system associated to each of the processes involved and the equilibrium position of the wall are calculated. Particularly, the cases  $N = 1$  and  $N = 2$  are explicitly studied for bosonic and fermionic particles. In all cases, the results found are compared to their classical counterpart. It is found that, in general,  $W_{TOT}$  depends on the bosonic or fermionic nature of the particles.

**Keywords:** Quantum information, thermodynamics and quantum statistical mechanics.

## 1 Introducción

El demonio de Maxwell fue mencionado por primera vez en 1871 en el libro “Theory of Heat” escrito por el físico escocés James Clerk Maxwell [1]. En este experimento mental, se considera una caja dividida en dos compartimientos  $A$  y  $B$ . La división tiene un pequeño hueco y un demonio que puede ver las moléculas individuales abre y cierra el hueco de tal forma que solo permite pasar las moléculas rápidas del compartimiento  $A$  al  $B$  y las partículas lentas de  $B$  a  $A$ . Como resultado, después de un tiempo, la energía cinética promedio de las partículas en  $B$  será mayor que la de las de  $A$ . De esta forma, el demonio, sin realizar ningún trabajo aumentará la temperatura de  $B$  y disminuirá la de  $A$ , ver Fig. 1. Este resultado

contradice la segunda ley de la termodinámica, la cual en la interpretación de Clausius afirma que: “no es posible ningún proceso cuyo único resultado sea la transferencia de calor de un cuerpo de menor temperatura a otro de mayor temperatura”. Dicho de otra forma, en la paradoja planteada por Maxwell el demonio disminuye la entropía del sistema sin realizar ningún trabajo sobre dicho sistema.



**Figura 1.** Demonio de Maxwell. Los círculos oscuros representan las moléculas rápidas y los claros las lentas. Inicialmente ambos compartimentos tienen la misma energía cinética promedio. Después de la acción del demonio el compartimento B tiene una energía cinética mayor a la de A.

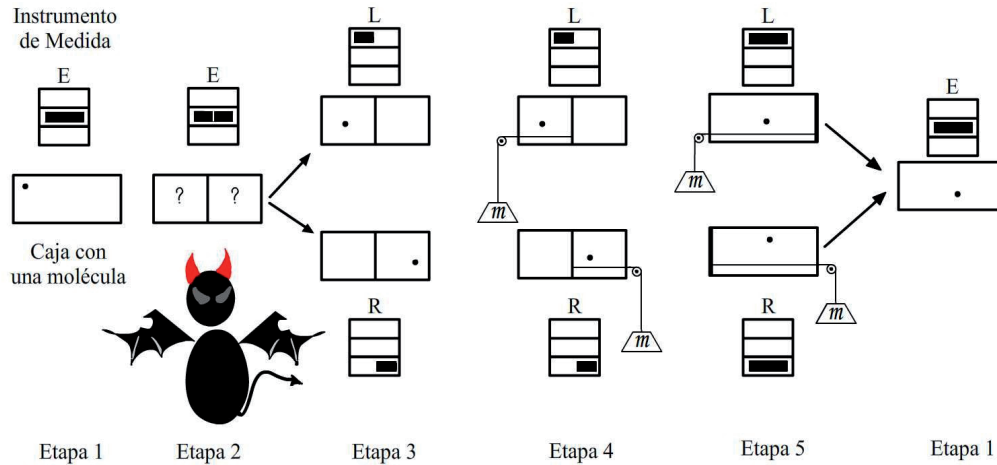
Esta paradoja suscitó una amplia discusión en torno a sus posibles explicaciones. Una de las respuestas más célebres fue dada por L. Szilard en 1929 [2]. Su respuesta a la contradicción planteada por Maxwell se basó en la afirmación de que el demonio transforma información en entropía negativa. Para determinar las velocidades de las partículas es necesario realizar un proceso de medición. Por lo tanto, es necesario que el demonio interactúe con el gas. Desde este punto de vista no es correcto considerar al gas como un sistema aislado sino que, por el contrario, se deben considerar el demonio y el gas como un solo sistema aislado. De esta forma aunque la entropía del gas disminuye la del demonio debe aumentar. En la respuesta de Szilard la segunda ley es salvada debido a que el proceso de medición es de naturaleza irreversible. Otras interpretaciones se encuentran en las Refs. [3, 4, 5, 6].

En este artículo se presenta una revisión detallada de la máquina de Szilard cuántica basada principalmente en el trabajo de Kim et al. [7]. Sin embargo, en este artículo se presentan detalladamente los cálculos que llevan a las conclusiones reportadas en Ref. [7]. De esta forma se ofrece un material más detallado enfocado a un público más general.

## 2 Máquina de Szilard

La máquina de Szilard es una versión sofisticada del demonio de Maxwell [7, 8]. Para empezar se considera nuevamente una caja con una sola

molécula dentro de ella, ver la etapa 1 en la Fig. 2. En la etapa 2, sin realizar trabajo, se coloca una pared que divide la caja en dos partes iguales. Así, al final de esta etapa el demonio no sabe a qué lado de la pared está la molécula. Como se muestra, en la etapa 3 el demonio mide y determina en qué lado de la caja se encuentra la molécula. Después de esto el demonio sujeta una masa  $m$  a la pared tal y como se muestra en la etapa 4 de la Fig. 2. De esta forma, usando la información obtenida en la medición el demonio puede extraer trabajo del sistema. Por ejemplo, si la expansión es isotérmica, la cantidad de trabajo extraído está dado por:



**Figura 2.** Máquina de Szilard. El ciclo está formado básicamente por cuatro procesos: inserción, medición, expansión y remoción. Es importante notar que la información recaudada en el proceso de medición es vital para determinar a qué lado de la pared se debe sujetar la masa para así extraer trabajo del sistema.

$$W = \int_{\frac{V}{2}}^V P dV = \int_{\frac{V}{2}}^V k_B T \frac{dV}{V} = k_B T \ln 2. \quad (1)$$

Al final de la expansión la pared es removida sin realizar trabajo y el sistema vuelve al estado inicial. Este proceso puede repetirse indefinidamente creando una máquina perfecta, lo cual por supuesto va en contradicción de la segunda ley. Durante cada ciclo, la entropía del sistema disminuye dado que antes de la medición el número de estados posibles es  $\Omega = 2$  puesto que la molécula puede encontrarse a la izquierda o a la derecha de la pared. Sin embargo, después de la medición sólo hay un estado,  $\Omega = 1$ . De esta forma, teniendo en cuenta que la entropía del sistema está dada por  $S = k_B \ln \Omega$  tenemos que el cambio en  $S$  está dado por:

$$\Delta S = -k_B \ln 2. \quad (2)$$

Se puede ver que el trabajo extraído del sistema es proporcional al cambio de entropía del mismo. De esta forma la segunda ley se encuentra

a salvo. Sin embargo, en 1982 Bennett señaló que los procesos de medición no necesariamente debían ser irreversibles [5]. En su trabajo, Bennett considera que el demonio tiene un aparato que se encuentra en el estado estándar (E) antes de la medición, tal y como se observa en la etapa 1 de la Fig. 2. El proceso de grabar información sobre una cinta en blanco es un proceso reversible. Por el contrario, si la cinta no está en blanco el proceso es irreversible. Supongamos que el demonio inicia el proceso con un aparato de medida que tiene una cinta en blanco. Una vez realizado el proceso de medida el aparato pasa del estado estándar (E) a uno de los dos estados resultantes posibles (R) o (L) dependiendo de si la molécula se encuentra al lado derecho o izquierdo de la división, respectivamente. Para volver al estado inicial es necesario que el aparato de medida vuelva al estado (E). Esto es posible borrando la información de la medición contenida en el aparato. En el enfoque de Bennett lo que salva la segunda ley es la naturaleza irreversible del proceso de borrado de información. Dicha información es requerida para saber donde colocar la masa y de esta forma extraer trabajo del sistema. El proceso de borrado del aparato de medida es irreversible y por lo tanto viene acompañado de generación de entropía. El trabajo requerido para borrar un bit de información es precisamente  $k_B T \ln 2$ . Bennett alcanza la misma conclusión de Szilard, pero por razones diferentes.

### 3 Máquina de Szilard Cuántica

Consideremos ahora el análogo cuántico de la máquina de Szilard. Para modelar el contenedor tenemos un potencial de la forma  $V(x) = 0$  si  $0 < x < L$  y  $V(x) = \infty$  en caso contrario. Se tienen  $N$  partículas idénticas de masa  $M$  confinadas de la forma mencionada anteriormente. El espectro de energía de cada partícula se obtiene solucionando la ecuación de valores propios:

$$\mathcal{H} \phi(x) = E_n \phi(x), \quad (3)$$

en donde las funciones propias están sujetas a  $\phi(0) = \phi(L) = 0$  y  $\mathcal{H}$  es el hamiltoniano del sistema de una partícula libre. El resultado es bien conocido, los valores propios del hamiltoniano están dados por  $E_n(L) = h^2 n^2 / 8 M L^2$  [9]. En el modelo clásico, la inserción de la pared puede realizarse sin necesidad de trabajo. En el sistema cuántico sin embargo, la inserción tiene asociado un trabajo ya que al limitar el espacio disponible que tienen las partículas se altera el espectro de energía del sistema. El trabajo cuántico puede calcularse como se muestra en el Apéndice A. Sea  $x = L/2$  la posición de inserción de la pared. El trabajo asociado a la inserción isotérmica de la pared,  $W_{\text{INS}}$ , se obtiene tomando

$x_2 = L/2$  y  $x_1 = L$  en la Ec. (22) llevando a:

$$W_{\text{INS}} = k_B T (\text{Ln} \zeta_N(L/2, \beta) - \text{Ln} Z_N(L, \beta)), \quad (4)$$

con  $Z_N(L, \beta) = \sum_n e^{-\beta E_n(L)}$ . Por su parte, dado que justo al final de la inserción la medida aún no ha sido tomada entonces se tiene  $\zeta_N(x, \beta) = \sum_{m=0}^N z_m(x, \beta)$  con  $z_m(x, \beta)$  la función de partición del sistema cuando hay  $m$  partículas a la izquierda y  $N - m$  a la derecha con la pared en la posición  $x$ . Note que la suma sobre  $m$  tiene en cuenta todas las configuraciones posibles antes de la medición. Una vez se hace la medición, el gas se expande hasta que alcanza la posición de equilibrio  $l_m^{\text{eq}}$ . Naturalmente, la posición de equilibrio depende del número de partículas que se encuentran a cada lado de la pared. El trabajo realizado durante la expansión está dado por:

$$W_{\text{EXP}} = k_B T \sum_{m=0}^N f_m(L/2) \text{Ln} \left( \frac{z_m(l_m^{\text{eq}}, \beta)}{z_m(L/2, \beta)} \right), \quad (5)$$

en donde  $f_m(x) = z_m(x, \beta) / \sum_{m=0}^N z_m(x, \beta)$  es la probabilidad de encontrar  $m$  partículas a la izquierda al momento de medir dado que la división está en la posición  $x$ . Aquí hemos asumido que el tiempo de expansión es mucho menor que el tiempo de tunelamiento. La posición de equilibrio está determinada por el balance de fuerzas a cada lado de la división:

$$F_d + F_i = 0, \quad (6)$$

con  $F = - \sum_n \frac{\partial E_n}{\partial x} e^{-\beta E_n(x)} / Z(x, \beta)$  (ver Ec. (21)). Es importante resaltar que la posición de equilibrio  $x = l_m^{\text{eq}}$  es, en general, diferente de la que se obtiene clásicamente. A partir de la ecuación de los gases ideales se tiene que  $F_i = m k_B T / x$  y  $F_d = -(N - m) k_B T / (L - x)$ . Es claro que, clásicamente la posición de equilibrio es  $l_m^{\text{eq}} = m L / N$ . Tal y como se muestra en el apéndice B, la solución de la Ec. (6) tiende a  $m L / N$  en el límite de altas temperaturas.

Para calcular el trabajo de remoción es necesario tener en cuenta el tunelamiento durante la remoción de la división. Esto es debido al hecho de que a medida que disminuye el potencial que modela la pared, el tiempo de tunelamiento se hace comparable con el tiempo de la remoción. Por lo tanto, la función de partición inicial es  $\zeta_N(l_m^{\text{eq}}, \beta) = \sum_{n=0}^N z_n(l_m^{\text{eq}}, \beta)$  en lugar de simplemente  $z_m(l_m^{\text{eq}}, \beta)$ . Partiendo de esto podemos escribir:

$$W_{\text{REM}} = k_B T \sum_{m=0}^N f_m(L/2) \text{Ln} \left( \frac{Z_N(L, \beta)}{\zeta_N(l_m^{\text{eq}}, \beta)} \right). \quad (7)$$

Después de un poco de álgebra es posible mostrar que el trabajo total,  $W_{TOT}$ , puede escribirse como:

$$\begin{aligned} W_{TOT} &= W_{INS} + W_{EXP} + W_{REM} \\ &= -k_B T \sum_{m=0}^N f_m(L/2) \text{Ln} \left( \frac{f_m(L/2)}{g_m(l_m^{eq})} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{con } g_m(l_m^{eq}) = z_m(l_m^{eq}, \beta) / \zeta_N(l_m^{eq}, \beta).$$

### 3.1 Caso $N = 1$

Consideremos el caso de una partícula ( $N = 1$ ) en donde la inserción de la pared se realiza en la posición  $x = L/2$ . Siguiendo el apéndice C y usando las ecuaciones (4), (5) y (7) se encuentra que los trabajos de inserción, expansión y remoción están dados por:

$$W_{INS} = k_B T \text{Ln} 2 - k_B T \Delta, \quad (9)$$

$$W_{EXP} = k_B T \Delta, \quad (10)$$

y

$$W_{REM} = 0, \quad (11)$$

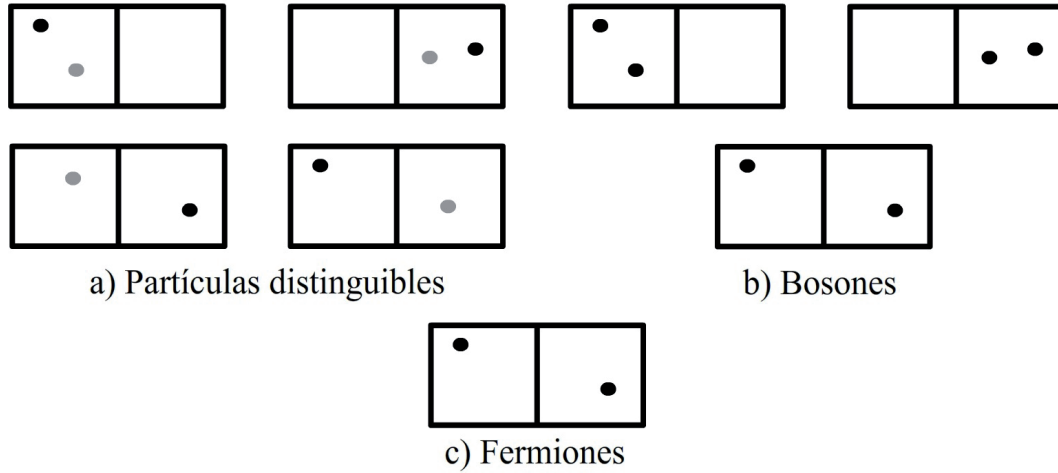
respectivamente. Note que se ha usado:

$$\Delta = \text{Ln} \left( \frac{Z_1(L, \beta)}{Z_1(L/2, \beta)} \right). \quad (12)$$

El trabajo total coincide con el resultado clásico  $W_{TOT} = K_B T \text{Ln} 2$ . Sin embargo, es importante resaltar que en este caso  $W_{INS} \neq 0$  en contraste con su contraparte clásica. En el límite de bajas temperaturas,  $\beta \gg 1$ , sólo contribuye el primer término de la suma ( $n = 1$ ) en la Ec. (25). De esta forma se tiene  $\Delta \approx E_1(L/2) - E_1(L)$ . Por su parte, en el límite de altas temperaturas,  $\beta \ll 1$ , la suma sobre  $n$  puede reemplazarse por medio de una integral llevando a  $\Delta \approx \text{Ln} \left( \frac{L}{L/2} \right) = \text{Ln} 2$ . Esto implica que, como era de esperarse, en el límite clásico  $W_{INS} = K_B T \text{Ln} 2 - K_B T \Delta = 0$ .

### 3.2 Dos partículas $N = 2$

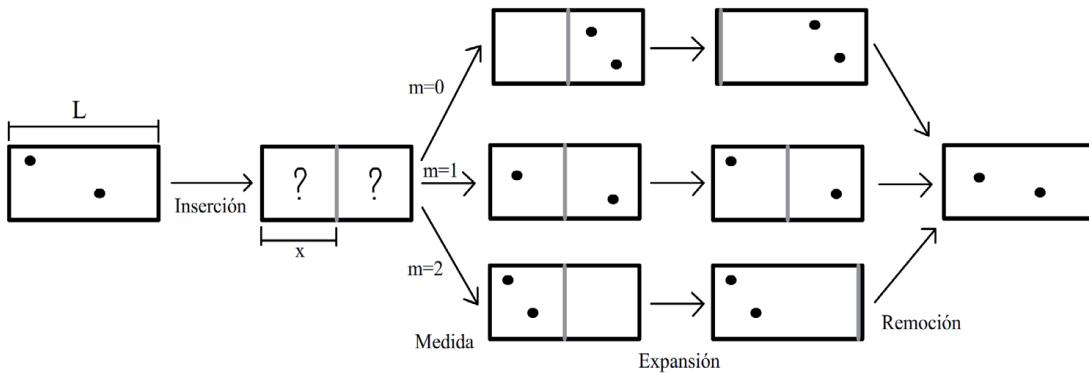
En el caso de  $N \geq 2$  es importante tener en cuenta la naturaleza de las partículas. Como se observa en la Fig. 3, si las partículas son distinguibles el número total de estados después de la inserción de la pared es cuatro. Por su parte, si consideramos que las partículas son indistinguibles la situación cambia radicalmente. En el caso de los bosones después de la inserción hay tres estados posibles mientras que para los fermiones solo hay uno.



**Figura 3.** Posibles estados del sistema después de la inserción de la pared. En el caso de partículas distinguibles hay cuatro estados posibles ( $f_m = 1/4$  con  $m = 0, 1$  o  $2$ ), para bosones hay tres ( $f_m = 1/3$  con  $m = 0, 1$  o  $2$ ) y para fermiones tan solo uno ( $f_m = 1$  con  $m = 1$ ).

### 3.2.1 Dos Bosones

Consideremos ahora el caso de dos bosones,  $N = 2$ . Nuevamente la posición de inserción es  $x = L/2$ . En este caso hay tres estados posibles después de la expansión, los dos bosones quedan a la derecha de la división ( $m = 0$ ), los dos bosones quedan a la izquierda ( $m = 2$ ) o uno queda a la derecha y el otro a la izquierda ( $m = 1$ ), ver Fig. 4. En cada uno de estos casos las posiciones de equilibrio de la pared son  $l_0^{eq} = 0$ ,  $l_2^{eq} = L$  y  $l_1^{eq} = L/2$ , respectivamente. Un esquema de esta situación se muestra en la Fig. 4.



**Figura 4.** Máquina de Szilard con dos partículas. Los cuatro procesos están indicados para cada uno de los casos posibles  $m = 0$ ,  $m = 1$  y  $m = 2$ .

Nótese que la probabilidad de que después de la inserción los dos bosones estén a la derecha o a la izquierda de la pared es igual, es decir  $f_0(L/2) = f_2(L/2)$ . Teniendo en cuenta las relaciones mostradas en el apéndice C junto con la Ec. (8) se encuentra:

$$W_{\text{TOT}} = -2 k_B T f_0(L/2) \text{Ln}(f_0(L/2)), \quad (13)$$

con

$$f_0(L/2) = \frac{d+1}{4d+2} \quad \text{y} \quad d = \frac{Z_1(L/2, \beta)^2}{Z_1(L/2, 2\beta)}, \quad (14)$$

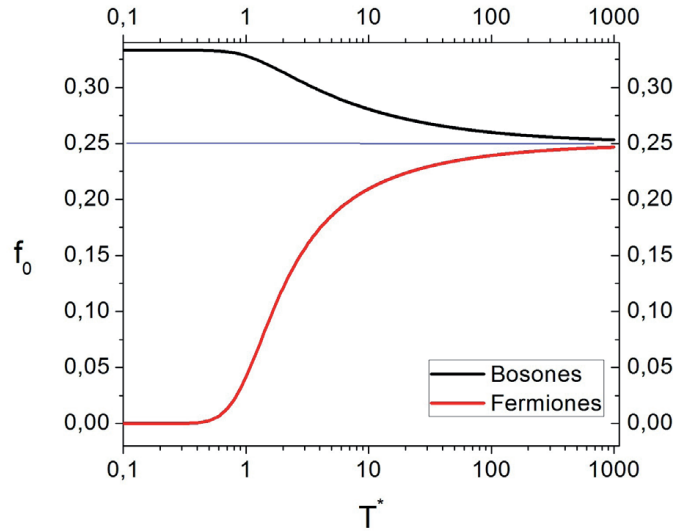
con  $Z_1(x, \beta)$  la función de partición de una partícula confinada en una región de longitud  $x$  a una temperatura inversa  $\beta$ .

### 3.2.2 Dos Fermiones $N = 2$

Consideremos nuevamente el caso  $N = 2$  pero ahora con fermiones en lugar de bosones. Se puede realizar el mismo procedimiento descrito en la sección anterior pero teniendo en cuenta ahora la función de partición fermiónica dada en el Apéndice C. Teniendo en cuenta esto, se puede escribir:

$$f_0(L/2) = \frac{d-1}{4d-2}, \quad (15)$$

con  $d$  tal y como está definido en la Ec. (14). El comportamiento de  $f_0$  se muestra en la Fig. 5 para bosones y fermiones. Como es de esperar, para altas temperaturas  $W_{\text{TOT}} = k_B T \text{Ln}2$  sin importar si se trata de fermiones o bosones puesto que, en este límite, en ambos casos  $f_0$  tiende a  $1/4$ . En el caso de los fermiones, a bajas temperaturas se tiene  $W_{\text{TOT}} = 0$  debido a que el principio de exclusión de Pauli requiere que  $f_0 = f_2 = 0$  y  $f_1 = 1$ . Por su parte, en el caso de bosones  $W_{\text{TOT}} = \frac{2}{3} k_B T \text{Ln}3$  ya que  $f_0 = 1/3$  debido a que hay tres estados igualmente probables después de la inserción, ver Fig. 4.



**Figura 5.** Comportamiento de  $f_0$  como función de  $\frac{1}{T^*} = \beta h^2 n^2 / 8 M L^2$ . Note que para valores altos de  $T$  el gas se comporta clásicamente. Por su parte, para bajas temperaturas los efectos cuánticos se hacen importantes y  $f_0$  depende de la naturaleza de las partículas.



## 4 Conclusiones

La máquina de Szilard cuántica proporciona un excelente ejemplo que ilustra los efectos de la naturaleza fermiónica o bosónica de las partículas. La función de partición cuántica entonces debe considerar los efectos de indistinguibilidad y de intercambio de partículas.

La descripción cuántica del proceso requiere tener en cuenta el trabajo requerido para la inserción y remoción de la pared mientras que clásicamente ambos trabajos son nulos. Para  $T \ll 1$  el trabajo total depende de la naturaleza fermiónica o bosónica de las partículas. Para  $T \gg 1$  el trabajo total se reduce a su contraparte clásica puesto que en este límite  $W_{\text{INS}}$  y  $W_{\text{REM}}$  tienden a cero.

La posición de equilibrio de la pared en la máquina cuántica difiere en general del resultado clásico coincidiendo solo en el límite de altas temperaturas.

La máquina de Szilard cuántica constituye un excelente ejemplo de los efectos de la estadística cuántica permitiendo realizar fácilmente el contraste con su análoga clásica. Debido a esto el sistema descrito es sin duda de alto valor pedagógico para estudiantes de un curso intermedio de mecánica estadística.

### A Trabajo cuántico

Por definición la energía interna  $U$  está dada por:

$$U = \sum_n E_n P_n, \quad (16)$$

con  $P_n = e^{-\beta E_n}/Z$  siendo  $Z$  la función de partición canónica. Por lo tanto:

$$dU = \sum_n (dE_n P_n + P_n dE_n). \quad (17)$$

El trabajo es el cambio en la energía interna debido al cambio en los parámetros externos, es decir,  $dW = -\sum_n dE_n P_n$ . Teniendo en cuenta además la identidad:

$$\frac{\partial \text{Ln}(Z)}{\partial E_n} = -\beta P_n, \quad (18)$$

se encuentra inmediatamente que:

$$dW = k_B T \sum_n dE_n \frac{\partial \text{Ln}(Z)}{\partial E_n}. \quad (19)$$

En nuestro caso el parámetro externo es la longitud de la caja que cambia debido a la inserción de la pared. Sea  $E = E(x)$ , por lo tanto:

$$dW = k_B T \sum_n \frac{\partial E_n}{\partial x} \frac{\partial \text{Ln}(Z)}{\partial E_n} dx. \quad (20)$$

Si el parámetro externo cambia de  $x_1$  a  $x_2$  tenemos que el trabajo cuántico total está dado por:

$$W = k_B T \sum_n \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial E_n}{\partial x} \frac{\partial \text{Ln}(Z)}{\partial E_n} dx. \quad (21)$$

De forma explícita:

$$W = k_B T (\text{Ln}(Z(x_2)) - \text{Ln}(Z(x_1))). \quad (22)$$

## B Posición de equilibrio

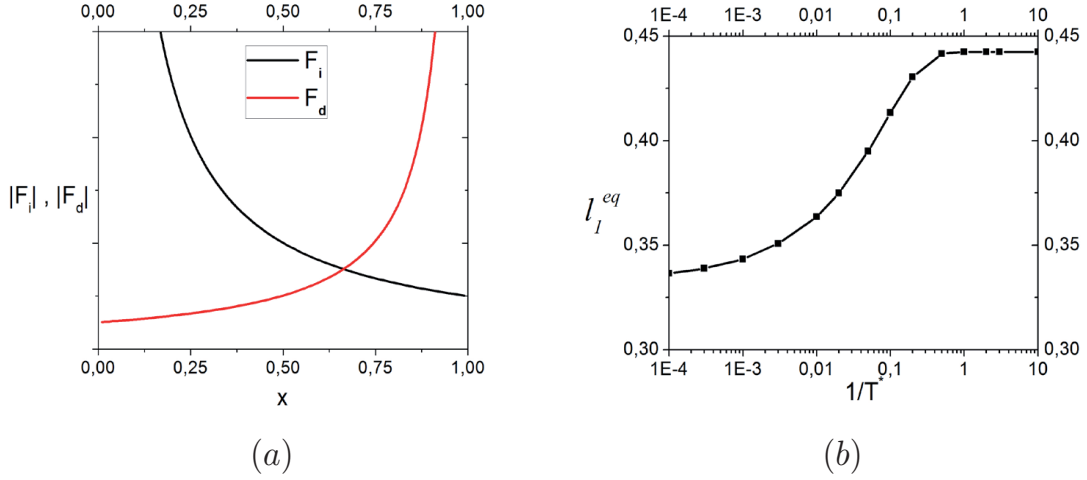
Como se mencionó en el texto, la posición de equilibrio de la pared después de la expansión no es simplemente  $x = m L/N$  como ocurre clásicamente. Consideremos, por ejemplo, el primer caso no trivial  $N = 3$  y  $m = 1$ . En este caso, la función de partición para el compartimiento a la derecha de la pared está dada por  $Z_2(L - x, \beta)$  mientras que para el de la izquierda es  $Z_1(x, \beta)$ , ver Apéndice C. De esta forma, las fuerzas sobre la pared están dadas por:

$$\begin{aligned} F_i(x) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta E_n(x)}}{Z_1(x, \beta)} \frac{\partial E_n(x)}{\partial x} \\ &= \frac{h^2}{4 M x^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{e^{-\beta \frac{h^2 n^2}{8 M x^2}}}{Z_1(x, \beta)}, \end{aligned} \quad (23)$$

y

$$\begin{aligned} F_d(x) &= - \frac{1}{2} \sum_{m,n} \frac{e^{-\beta E_{m,n}^T(L-x)}}{Z_2(L-x, \beta)} (1 \pm \delta_{m,n}) \frac{\partial E_{m,n}^T(L-x)}{\partial x} \\ &= - \frac{h^2}{8 M (L-x)^3} \sum_{m,n} \frac{e^{-\beta \frac{h^2 (n^2+m^2)}{8 M (L-x)^2}}}{Z_2(L-x, \beta)} u_{n,m} \end{aligned} \quad (24)$$

en donde se usó  $E_{m,n}^T(L-x) = E_n(L-x) + E_m(L-x)$  y  $u_{n,m} = (1 \pm \delta_{m,n})(n^2 + m^2)$ . En la Fig. B se muestra el comportamiento de  $F_i(x)$  y  $F_d(x)$  como función de  $x$ .



**Figura 6.** a) Comportamiento de  $|F_i(x)|$  y  $|F_d(x)|$  para diferentes valores de  $x$  con  $L = 1$ . Naturalmente la posición de equilibrio está dada por la intersección de las dos curvas. b) Posición de equilibrio para diferentes valores de  $1/T^* = \beta \hbar^2 n^2 / 8 M L^2$ . A medida que la temperatura aumenta se recupera el límite clásico  $l_1^{eq} = 1/3$ .

## C Función de partición

### C.1 N=1

En este caso, la función de partición antes de la inserción está dada por:

$$Z_1(L, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta E_n(L)}, \quad (25)$$

con  $E_n(L) = \hbar^2 n^2 / 8 M L^2$ . Si la pared se coloca en la posición  $x$  entonces  $z_1(x, \beta) = Z_1(x, \beta)$  y  $z_0(x, \beta) = Z_1(L - x, \beta)$ . Entonces, después de la inserción y antes de la medición, la función de partición está dada por:

$$\zeta_1(L/2, \beta) = z_0(L/2, \beta) + z_1(L/2, \beta), \quad (26)$$

en donde  $z_0(L/2, \beta) = z_1(L/2, \beta) = Z_1(L/2, \beta)$ . Se puede concluir entonces que  $\zeta_1(L/2, \beta) = 2 Z_1(L/2, \beta)$ . Por su parte, después de la expansión si  $m = 0$  se tiene  $x = l_0^{eq} = 0$  por lo tanto:

$$\zeta_1(l_0^{eq}, \beta) = z_0(l_0^{eq}, \beta) = Z_1(L, \beta). \quad (27)$$

De la misma forma, en el caso  $m = 1$ ,  $x = l_1^{eq} = L$ :

$$\zeta_1(l_1^{eq}, \beta) = z_1(l_1^{eq}, \beta) = Z_1(L, \beta). \quad (28)$$

Como consecuencia tenemos que:

$$f_0(L/2) = z_0(L/2, \beta) / \zeta(L/2, \beta) = 1/2, \quad (29)$$

y

$$f_1(L/2) = z_1(L/2, \beta) / \zeta_1(L/2, \beta) = 1/2. \quad (30)$$

## C.2 N = 2

Consideremos ahora el caso de dos partículas. Antes de la inserción y después de la remoción, el estado del sistema con dos bosones está dado por el ket simétrico:

$$|n_1, n_2\rangle^{(+)} = |n_1, n_2\rangle + |n_2, n_1\rangle, \quad (31)$$

mientras que en el caso de dos fermiones el estado está descrito por el ket antisimetrizado:

$$|n_1, n_2\rangle^{(-)} = |n_1, n_2\rangle - |n_2, n_1\rangle. \quad (32)$$

A partir de ahora se tratarán de forma simultánea los casos de fermiones y bosones. La función de partición  $Z_2(L, \beta)$  está dada por:

$$Z_2(L, \beta) = \frac{1}{2} \langle n, m | e^{-\beta E_n(L) + E_m(L)} | n, m \rangle^{(+, -)}, \quad (33)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} Z_2(L, \beta) &= \frac{1}{2} \sum_{m, n} e^{-\beta(E_m + E_n)} (1 \pm \delta_{m, n}) \\ &= \frac{1}{2} (Z_1(L, \beta)^2 \pm Z_1(L, 2\beta)), \end{aligned} \quad (34)$$

el signo superior corresponde al caso de los bosones y el inferior al caso de los fermiones. Consideremos ahora el caso en que hay una pared en la posición  $x$ . Hay tres posibilidades, las dos partículas quedan a la derecha de la pared, las dos quedan a la izquierda o queda una partícula a cada lado de la pared. Claramente, la función de partición en los dos primeros casos está dada por:

$$z_0(x, \beta) = Z_2(L - x, \beta), \quad (35)$$

y

$$z_2(x, \beta) = Z_2(x, \beta). \quad (36)$$

En el caso en que cada partícula queda a un lado de la pared la función de partición se escribe como:

$$z_1(x, \beta) = \sum_{m,n} e^{-\beta(E_m(x) + E_n(L-x))} = Z_1(x)Z_1(L-x). \quad (37)$$

Cuando la pared se inserta en la posición  $x = L/2$ , las expresiones anteriores se reducen a:

$$z_0(L/2, \beta) = z_2(L/2, \beta) = Z_2(L/2, \beta), \quad (38)$$

y

$$z_1(L/2, \beta) = Z_1(L/2, \beta)^2. \quad (39)$$

Así mismo, después de la expansión tenemos que si  $m = 0$ :

$$z_2(l_0^{eq}, \beta) = z_1(l_0^{eq}, \beta) = 0 \text{ y } z_0(l_0^{eq}, \beta) = Z_2(L, \beta). \quad (40)$$

En el caso de  $m = 1$ :

$$z_0(l_1^{eq}, \beta) = z_2(l_1^{eq}, \beta) = Z_2(L/2, \beta), \quad (41)$$

y

$$z_1(l_1^{eq}, \beta) = Z_1(L/2, \beta)^2. \quad (42)$$

Finalmente, para  $m = 2$  se cumple:

$$z_2(l_2^{eq}, \beta) = Z_2(L, \beta) \text{ y } z_0(l_1^{eq}, \beta) = z_1(l_1^{eq}, \beta) = 0. \quad (43)$$

A partir de las Ecs. (35) y (36) es claro que las probabilidades de que las dos partículas queden a la izquierda o a la derecha son iguales, es decir,  $f_0(L/2) = f_2(L/2)$ . Explícitamente:

$$\begin{aligned} f_0(L/2) &= \frac{z_0(L/2, \beta)}{z_0(L/2, \beta) + z_1(L/2, \beta) + z_2(L/2, \beta)} \\ &= \frac{z_0(L/2, \beta)}{2 z_0(L/2, \beta) + z_1(L/2, \beta)} \\ &= \frac{Z_2(L/2, \beta)}{2 Z_2(L/2, \beta) + Z_1(L/2, \beta)^2} \end{aligned} \quad (44)$$

en donde  $Z_1(L/2, \beta)$  y  $Z_2(L/2, \beta)$  están dados por las Ecs. (25) y (34) respectivamente.

**Referencias bibliográficas**

- [1] Theory of Heat. J. C. Maxwell, Dover Publications, INC. Mineola, New York (2001)
- [2] L. Szilard, Zeitschrift fr Physik, **53** (1929).
- [3] L. Brillouin, Maxwell's Demon Cannot Operate: Information and Entropy. I, J. Appl. Phys. **22**, No. 3, 334 (1951).
- [4] R. Landauer, Irreversibility and Heat Generation in the Computing Process. IBM JOURNAL, Julio, 183 (1961).
- [5] C. H. Bennett, The Thermodynamics of Computation—a Review. International Journal of Theoretical Physics, **21**, No. 12, 905 (1982).
- [6] H, S. Leff y Andrew F. Rex. Maxwell's Demon: Entropy, Information, Computing. American Journal of Physics, **60**, Issue 3 (1992).
- [7] S. W. Kim, T. Sagawa, S. De Liberato, y M. Ueda, Quantum Szilard Engine, Phys. Rev. Lett. **106**, 070401 (2011).
- [8] J. M. R. Parrondo y J. M. Horowitz, Maxwell's demon in the quantum world. Physics **4**, 13 (2011).
- [9] Statistical Mechanics. R. K. Pathria y P. D. Beale. Academic Press, tercera edición (2011).

**Dirección del autor**

Diego Luis González Cabrera  
Departamento de Física, Universidad del Valle, Cali - Colombia  
diego.luis.gonzalez@correounivalle.edu.co